Beispiel 1

Es sei $L = 0^*1^*$.

- $001 \equiv_L 0111$
- $010 \not\equiv_L 0111$, denn $010 \notin L$, $0111 \in L$.
- $00 \not\equiv_L 00001$, denn $000 \in L$, $000010 \notin L$.

Wieviele Äquivalenzklassen hat $\equiv_L$?

Drei:

1. 0^*
2. 0^*1^+
3. $0^*1^+0(0+1)^*$

Beispiel 2

Was ist der Index von $\equiv_L$ für diese Sprachen?

1. $L = \{0, 1\}^*$
2. $L = \{\, a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl} \,\}$
3. $L = \emptyset$
4. $L = \{\, w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist Vielfaches von } 7 \,\}$
5. $L = \{3, 3., 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots\}$
6. $L = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$
7. $L = \{\, a^n b^m \mid n \geq m \geq 0 \,\}$
8. $L = \{\, a^n b^m \mid |n - m| < 5 \,\}$

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lemma (A)

$L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\implies$ $\equiv_L$ hat endlichen Index.

Beweis.

1. L regulär und $L = L(M)$ mit DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
2. Definiere $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
3. $u \sim v \Rightarrow u \equiv_L v$, denn $uw \in L \iff vw \in L$ falls $\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
4. Also hat $\sim$ mindestens so viele Äquivalenzklassen wie $\equiv_L$.
5. $\sim$ hat aber endlichen Index.

□

Lemma (B)

$L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\quad \Longleftarrow \quad \equiv_L$ hat endlichen Index.

Beweis.

1. $L \subseteq \Sigma^*$ und Index von $\equiv_L$ sei endlich.
2. Konstruiere $M = (Q, \Sigma, \delta, [\epsilon]_{\equiv_L}, F)$ mit
   - $Q = \{\, [w]_{\equiv_L} \mid w \in \Sigma^* \,\}$
   - $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q, ([w]_{\equiv_L}, a) \mapsto [wa]_{\equiv_L}$
   - $F = \{\, [w]_{\equiv_L} \mid w \in L \,\}$
3. Q endlich, da Index von $\equiv_L$ endlich.
4. δ wohldefiniert, da $[u]_{\equiv_L} = [v]_{\equiv_L} \Rightarrow [ua]_{\equiv_L} = [va]_{\equiv_L}$
5. $L(M) = L$, da $\hat{\delta}([\epsilon]_{\equiv_L}, w) = [w]_{\equiv_L}$.

□

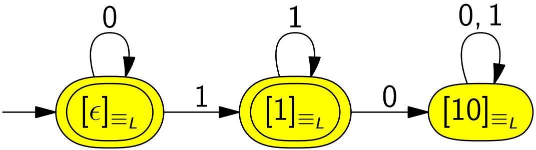
Beispiel

Es sei $L = 0^*1^*$.

$\equiv_L$ hat die Äquivalenzklassen

1. $[\epsilon]_{\equiv_L} = 0^*$,
2. $[1]_{\equiv_L} = 0^*1^+$ und
3. $[10]_{\equiv_L} = 0^*1^+0(0+1)^*$.

Der Myhill–Nerode–Automat:



Der Satz von Myhill–Nerode

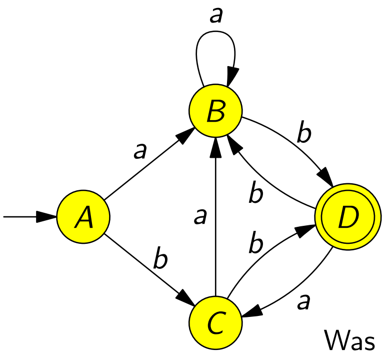
Theorem

1. *$L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann regulär, wenn $\equiv_L$ endlichen Index hat.*
2. *M ein DFA $\Longrightarrow \sim_M$ ist eine Verfeinerung von $\equiv_{L(M)}$.*
3. *Es gibt zu jeder regulären Sprache $L \in \Sigma^*$ einen bis auf Isomorphie eindeutigen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(M)$.*

Beweis.

1. Folgt aus Lemma A und B.
2. Beweis von Lemma A: $u \sim v \Rightarrow u \equiv_L v$.
3. Da $\sim$ eine Verfeinerung von $\equiv_L$ ist, muß $\sim = \equiv_L$ gelten, wenn ihre Indexe gleich sind.

Beispiel



Was sind die Äquivalenzklassen von $\sim$?

Natürlich $[\epsilon]_\sim$, $[a]_\sim$, $[b]_\sim$ und $[ab]_\sim$...

Was sind die Äquivalenzklassen von $\equiv_{L(M)}$?

Es sind $[\epsilon]_\sim$, $[a]_\sim \cup [b]_\sim$ und $[ab]_\sim$.