Sättigungsschritte

Sei $L = L(M)$ für einen NFA M.

Wir transformieren M in einen NFA M' mit $L(M') = pre^*_G(L)$ durch folgende Regeln:

Falls

1. $A \to \alpha \in P$ und
2. $p \in \hat{\delta}(q, \alpha)$

dann füge den Übergang $q \xrightarrow{A} p$ zum Automaten hinzu.

Wiederhole dies, bis nichts mehr hinzugefügt werden kann.

Definition

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine CFG und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA mit $\Sigma = N \cup T$.

Wir definieren für $k \geq 0$:

1. $M_G^0 = M$
2. $M_G^{k+1} = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ mit

   $\delta'(q, a) = \delta_{M_G^k}(q, a)$ falls $a \in T$,

   $\delta'(q, A) = \delta_{M_G^k}(q, A) \cup \{\, p \in Q \mid p \in \hat{\delta}_{M_G^k}(q, \beta)$ und $A \to \beta \in P \,\}$.

Definition

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $G = (N, T, P, S)$ eine CFG mit $\Sigma = N \cup T$.

1. $pre^0(L) := L$
2. $pre^{k+1}(L) := \{\, \alpha \mid \alpha \Rightarrow \beta \text{ für ein } \beta \in pre^k(L) \,\} \cup pre^k(L)$

Offensichtlich:

$$pre^*(L) = \bigcup_{n>0} pre^n(L)$$

Induktion über k: $pre^k(L) \subseteq L(M^k)$

Es sei $\alpha \in pre^k(L)$. Zwei Möglichkeiten:

1. $\alpha \in pre^{k-1}(L) \overset{\text{IV}}{\subseteq} L(M^{k-1}) \subseteq L(M^k)$.
2. $\alpha \Rightarrow \beta$ und $\beta \in pre^{k-1}(L) \subseteq L(M^{k-1})$.

   D.h. $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ und $A \to \gamma \in P$.

   Nach IV gilt $\beta \in L(M^{k-1})$, also

$$q_1 \in \hat{\delta}_{M^{k-1}}(q_0, \alpha_1)$$
$$q_2 \in \delta_{M^{k-1}}(q_1, A)$$
$$q_3 \in \hat{\delta}_{M^{k-1}}(q_2, \alpha_2) \text{ mit } q_3 \in F$$

Dann gilt $q_2 \in \delta_{M^k}(q_1, A)$ und $q_3 \in \hat{\delta}_{M^k}(q_0, \alpha)$.

Induktion über k: $L(M^k) \subseteq pre^*(L)$

Es sei $\alpha \in L(M^k)$.

Wieder zwei Möglichkeiten:

1. $\alpha \in L(M^{k-1})$, dann $\alpha \in pre^*(L)$ nach IV.
2. Sonst:

   $\alpha = \alpha_0 A_0 \alpha_1 A_1 \dots \alpha_m A_m \alpha_{m+1}$

   $\beta = \alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_m \beta_m \alpha_{m+1}$

   und $\beta \in L(M^{k-1})$, $A_i \to \beta_i \in P$ für $0 \leq i \leq m$.

   Nach IV gilt $\beta \in pre^*(L)$.

   Es gilt $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$ und damit auch $\alpha \in pre^*(L)$.

Beweis der zentralen Aussage

Theorem

Falls L regulär ist, dann ist auch $pre^*_G(L)$ regulär.

Beweis.

Wir haben bereits gezeigt:

1. $pre^k(L) \subseteq L(M^k)$
2. $L(M^k) \subseteq pre^*(L)$

Außerdem: $L(M^m) = L(M^{m+1}) = L(M^{m+2}) = \cdots$ für ein $m \in \mathbf{N}$.

Es folgt daraus, daß $L(M^m) = pre^*(L)$.

$L(M^m)$ ist als Sprache eines NFAs regulär. $\square$

Das Wortproblem

Definition

Das *Wortproblem* für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$ und ein Wort $w \in T^*$
- Frage: Gilt $w \in L(G)$?

Theorem

Das Wortproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

$w \in L(G)$ gdw. $S \in pre^*(\{w\})$. $\square$

Unproduktive Symbole

Definition

Finden von unproduktiven Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der unproduktiven Symbole von G:
  $\{ A \in N \mid \text{ es gibt kein } w \in T^* \text{ mit } A \overset{*}{\Rightarrow} w \}$

Theorem

Unproduktive Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der produktiven Symbole ist $N \cap pre^*(T^*)$. $\square$