

Das Leerheitsproblem

Definition

Das Leerheitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G) = \emptyset$?

Theorem

Das Leerheitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Es ist $L(G) = \emptyset$ gdw. $S \notin pre^*(T^*)$. □

Unerreichbare Symbole

Definition

Finden von unerreichbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der unerreichbaren Symbole von G :
 $\{ A \in N \mid \text{es gibt kein } \alpha A \beta \in (N \cup T)^* \text{ mit } S \xRightarrow{*} \alpha A \beta \}$

Theorem

Unerreichbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

A unerreichbar gdw. $S \notin pre^*((N \cup T)^* A (N \cup T)^*)$ □

Nullierbare Symbole

Definition

Finden von nullierbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der nullierbaren Symbole von G :
 $\{ A \in N \mid A \xRightarrow{*} \epsilon \}$

Theorem

Nullierbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der nullierbaren Symbole ist $N \cap pre^*(\{\epsilon\})$. □

Später: Wie entfernt man nullierbare Symbole?

Das Endlichkeitsproblem für CFG

Definition

Das Endlichkeitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G)$ endlich?

Theorem

Das Endlichkeitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Ersetze G durch G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$, aber G' enthält keine unproduktiven, unerreichbare oder nullierbare Symbole.

$|L(G)| = \infty$ gdw. es gibt $A \in N$ mit

$A \in pre_{G'}^*((N \cup T)^+ A (N \cup T)^* \cup (N \cup T)^* A (N \cup T)^+)$.



Das Schnittleerheitsproblem für CFG

Definition

Das Schnittleerheitsproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFG G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

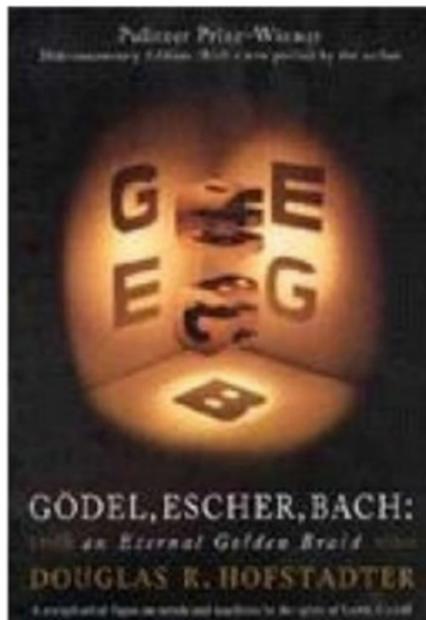
Theorem

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist „nicht berechenbar“.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. □

Weitere Buchempfehlung



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine Menge von Karten dieser Form:

| | | |
|----|-----|-----|
| 10 | 0 | 001 |
| 0 | 001 | 1 |

Frage:

Kann ich Karten dieser Art so aneinanderlegen, daß oben und unten dasselbe Wort entsteht?

(Jede Karte kann beliebig oft verwendet werden)

In *Berechenbarkeit und Komplexität* wird folgendes bewiesen:

Theorem

Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar.

Theorem

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Es sei

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

eine PCP-Instanz.

Konstruiere zwei Grammatiken:

$$G_1: S \rightarrow u_1 S v_1^R \mid \dots \mid u_n S v_n^R \mid \$$$

$$G_2: S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \$$$

Behauptung: $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ gdw. I lösbar.



Das Eindeutigkeitsproblem für CFG

Definition

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG G
- Frage: Ist G eine eindeutige CFG?

Theorem

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. □

Beweis.

Es sei

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

eine PCP-Instanz.

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow u_1 A x_1 \mid u_2 A x_2 \mid \dots \mid u_n A x_n \mid u_1 x_1 \mid u_2 x_2 \mid \dots \mid u_n x_n$$

$$B \rightarrow v_1 B x_1 \mid v_2 B x_2 \mid \dots \mid v_n B x_n \mid v_1 x_1 \mid v_2 x_2 \mid \dots \mid v_n x_n$$

Behauptung:

Die Grammatik ist eindeutig gdw. I keine Lösung besitzt. □

Das Universalitätsproblem für CFG

Definition

Das Universalitätsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G) = T^*$?

Theorem

Das Universalitätsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Post'sches Korrespondenzproblem. □

Beweis.

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

- $L_1 = \{ h^{-1}(w\$w^R) \mid w \in \{0, 1\}^* \}$,
 $h: 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, \dot{\$} \mapsto \epsilon, \$ \mapsto \$$
- $L_2 = \{ u_{i_1} \dot{\$} \dots \dot{\$} u_{i_k} \$ v_{i_k}^R \dot{\$} \dots \dot{\$} v_{i_1}^R \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \}$

Technisch aufwendig, aber gar nicht so schwer:

$\{0, 1, \dot{\$}, \$\}^* \setminus L_1$ und $\{0, 1, \dot{\$}, \$\}^* \setminus L_2$ sind kontextfreie Sprachen.

Dann auch $L := \{0, 1, \dot{\$}, \$\}^* \setminus (L_1 \cap L_2)$ eine CFL.

Es gilt aber $L = \{0, 1, \dot{\$}, \$\}^*$ gdw. I keine Lösung hat.



Das Sprachäquivalenzproblem für CFG

Definition

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Theorem

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G_1 = (N, T, P, S)$. Konstruiere G_2 mit $L(G_2) = T^*$.

$L(G_1) = L(G_2)$ gdw. $L(G_1) = T^*$.

Wäre das Sprachäquivalenzproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. □

Das Inklusionsproblem für CFG

Definition

Das Inklusionsproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

Theorem

Das Inklusionsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G_1 = (N, T, P, S)$. Konstruiere G_2 mit $L(G_2) = T^*$.

$L(G_1) \subseteq L(G_2)$ gdw. $L(G_1) = T^*$.

Wäre das Inklusionsproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. □