### Definition

Eine linkslineare Grammatik ist ein kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to aB$, $C \to b$ und $D \to \epsilon$ mit $A, B, C, D \in N$ und $a, b \in T$.

### Theorem

*Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.*

## Lemma

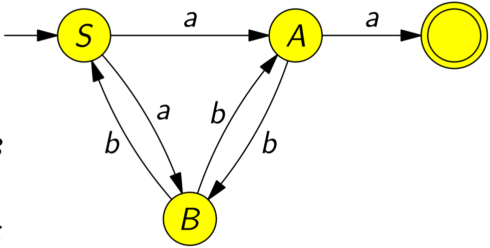
*Jede linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.*

## Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.
Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren. $\square$

# Beispiel




$$S \to aA \mid aB$$
$$A \to a \mid bB$$
$$B \to bA \mid bS$$

## Lemma

*Jede reguläre Sprache wird durch eine linkslineare Grammatik erzeugt.*

## Beweis.

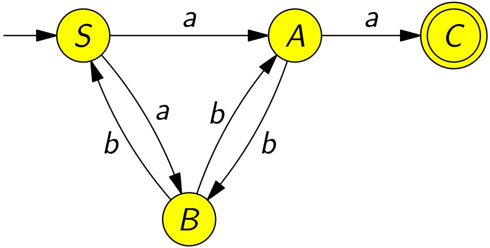
Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.
Definiere die Grammatik $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit den Produktionen

1. $q \to ap$ falls $p \in \delta(q, a)$ und
2. $q \to \epsilon$ falls $q \in F$.

Mit Induktion über $|w|$:

$p \in \hat{\delta}(w, q_0)$ gdw. $q_0 \overset{*}{\Rightarrow} wp$. □

# Beispiel




$$S \to aA \mid aB$$
$$A \to aC \mid bB$$
$$B \to bA \mid bS$$
$$C \to \epsilon$$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$$L = \{\, \$w\$w\$ \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$$

$$\begin{aligned}
S &\to LMR \\
M &\to AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$ \\
\bar{A}A &\to A\bar{A}, \quad \bar{A}B \to B\bar{A} \\
\bar{B}A &\to A\bar{B}, \quad \bar{B}B \to B\bar{B} \\
\bar{A}R &\to AR, \quad \bar{B}R \to BR \\
L &\to \$ \\
R &\to \$ \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}$$

## Theorem

*Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist nicht entscheidbar.*

## Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

$$\begin{aligned} S &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \\ M &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Rest der Grammatik: Übungsaufgabe)

Sprache ist leer gdw. $I$ keine Lösung hat. $\square$

### Theorem

*Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.*

### Beweis.

Es sei $G$ eine kontextsensitive Grammatik und $w$ ein Wort.

Wende Regeln rekursiv rückwärts auf alle möglichen Arten an.

Wir erhalten so alle $\alpha$ mit $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Ist das Startsymbol darunter?

Terminierung: $|\alpha| \leq |w|$ falls $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$. $\square$

## Theorem

*Das Wortproblem für Chomsky-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.*

## Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ v_2 \end{array}}, \dots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$$

$$\begin{aligned} S &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \\ M &\to u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\ 0D0 &\to D \\ 1D1 &\to D \\ D &\to \epsilon \end{aligned}$$

□