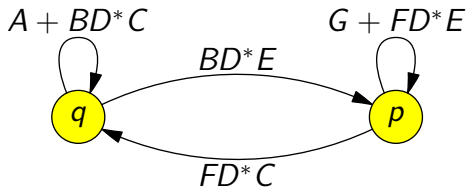
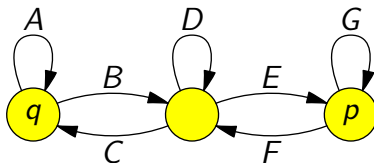


# Eliminierung eines Zustandes

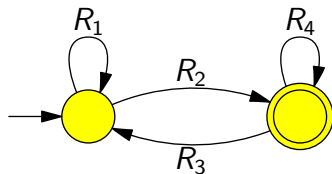


Für alle Paare  $(p, q)$ !

# Eliminierung von Zuständen

Allgemeines Vorgehen:

1. Starte mit einem NFA mit nur einem Endzustand
2. Eliminiere Zustände bis auf den Start- und Endzustand
3. Lies den regulären Ausdruck ab



Gesuchter Ausdruck ist:

$$R_1^* R_2 (R_4 + R_3 R_1^* R_2)^*$$

## Theorem (Pumping-Lemma)

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt  $n \in \mathbf{N}$ , so daß jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n$  in Wörter  $w = xyz$  zerlegt werden kann mit

1.  $|xy| \leq n$
2.  $|y| > 0$
3.  $xy^iz \in L$  für alle  $i \geq 0$

### Beweis.

Es sei  $L = L(M)$  für einen DFA  $M$  mit  $n$  Zuständen.

Ist  $|w| \geq n$  dann durchläuft  $M$  einen Zustand doppelt.

$p$  sei der erste solche Zustand.

Es gibt also  $xyz = w$ , mit

- ▶  $\hat{\delta}(q_0, x) = p$ ,
- ▶  $\hat{\delta}(p, y) = p$ ,  $|xy| \leq n$ ,  $|y| > 0$ ,
- ▶  $xy^iz \in L$

# Das Pumping-Lemma als Spiel

Gegeben sei eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$ .

1. Alice wählt eine Zahl  $n$ .
2. Bob wählt ein Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n$ .
3. Alice wählt  $x, y, z \in \Sigma^*$  mit  $xyz = w$ ,  $|xy| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
4. Bob wählt eine Zahl  $i$ .

Alice gewinnt, wenn  $xy^iz \in L$ .

Bob gewinnt, wenn  $xy^iz \notin L$ .

Falls  $L$  regulär ist, kann Alice immer gewinnen.

Gewinnstrategie für Bob  $\implies L$  nicht regulär!

# Beispiel

Es sei  $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ .

1. Alice wählt eine Zahl  $n$ .
2. Bob wählt  $w = a^n b^n$ .
3. Alice wählt  $x, y, z \in \{a, b\}^*$  mit  $xyz = w$ ,  $|xy| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
4. Bob wählt  $i = 2$ .

Bob hat gewonnen:

$xyyz$  enthält eine ungleiche Anzahl von  $a$  und  $b$ .

Also ist  $L$  (leider) nicht regulär.

# Beispiel

Es sei  $L = \{ a^{n^3} \mid n \geq 0 \}$ .

1. Alice wählt eine Zahl  $n$ .
2. Bob wählt  $w = a^{m^3}$  mit  $m = n + 30$ .
3. Alice wählt  $x, y, z \in a^*$  mit  $xyz = w$ ,  $|xy| \leq n$ ,  $|y| > 0$ .
4. Bob denkt:  $x = a^r$ ,  $y = a^s$ ,  $z = a^t$  mit  $r + s + t = m^3$ .  
Bob wählt  $i = 0$  und denkt weiter:

$$(m-1)^3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 < m^3 - m \leq |xy^0z| = r + t < m^3$$

# Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen

## Theorem

*Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist in polynomieller Zeit lösbar:*

*Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache  $L$*

*Frage: Ist  $L = \emptyset$ ?*

## Beweis.

DFA, NFA: Ist ein Endzustand vom Anfangszustand erreichbar?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln.



# Das Wortproblem für reguläre Sprachen

## Theorem

*Das Wortproblem für reguläre Sprachen ist in quadratischer (DFA: linearer) Zeit lösbar:*

*Eingabe: Ein DFA, NFA oder ein regulärer Ausdruck für Sprache  $L$*

*Frage: Ist  $w \in L$ ?*

## Beweis.

DFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit:  $O(|M| + |w|)$

NFA: Algorithmus aus Vorlesung

Laufzeit:  $O(|M| + |Q|^2 \cdot |\Sigma| + |Q|^2 \cdot |w|)$

Regulärer Ausdruck: In NFA verwandeln.





# Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen

## Theorem

*Das Universalitätsproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:*

*Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$*

*Frage: Ist  $L = \Sigma^*$ ?*

## Beweis.

DFA: Sind alle erreichbaren Zustände Endzustände?

Lineare Laufzeit mit Tiefensuche.

NFA, regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln.

Exponentielle Laufzeit.



# Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

## Theorem

*Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist in linearer Zeit lösbar:*

*Eingabe: DFA, NFA oder regulärer Ausdruck für Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$*

*Frage: Ist  $L$  endlich?*

## Beweis.

NFA, DFA: Gibt es

1. eine starke Zusammenhangskomponente, die vom Startzustand erreichbar ist, und
2. von der aus ein Endzustand erreichbar ist?

Lineare Laufzeit (Konstruktion der starken Zusammenhangskomponenten: Datenstrukturen und Algorithmen)

# Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

## Theorem

*Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist algorithmisch lösbar:*

*Eingabe: Zwei DFAs, NFAs oder reguläre Ausdrücke für Sprachen  $L_1$  und  $L_2$*

*Frage: Ist  $L_1 = L_2$ ?*

## Beweis.

DFA: Minimiere beide und teste ob sie dann isomorph sind.

NFA, Regulärer Ausdruck: In DFA verwandeln.



# Kontextfreie Grammatik

## Definition

Eine *kontextfreie Grammatik* ist ein 4-Tupel  $(N, T, P, S)$

- ▶  $N$  ein Alphabet der *Nonterminale* oder *Variablen*
- ▶  $T$  ein Alphabet der *Terminalsymbole*
- ▶  $P$  Menge von *Produktionen* der Form  $A \rightarrow \alpha$   
mit  $A \in N$  und  $\alpha \in (N \cup T)^*$
- ▶  $S \in N$  das *Startsymbol*

Wir verlangen  $N \cap T = \emptyset$ .