Das Leerheitsproblem

Definition

Das Leerheitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G) = \emptyset$?

Theorem

Das Leerheitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Es ist $L(G) = \emptyset$ gdw. $S \notin pre^*(T^*)$. $\square$

Unerreichbare Symbole

Definition

Finden von unerreichbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der unerreichbaren Symbole von G:
  $\{ A \in N \mid \text{ es gibt kein } \alpha A \beta \in (N \cup T)^* \text{ mit } S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta \}$

Theorem

Unerreichbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

A unerreichbar gdw. $S \notin \mathit{pre}^*((N \cup T)^* A (N \cup T)^*)$ $\square$

Nullierbare Symbole

Definition

Finden von nullierbaren Symbolen einer CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Ausgabe: Eine Liste der nullierbaren Symbole von G: $\{\, A \in N \mid A \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon \,\}$

Theorem

Nullierbare Symbole einer CFG lassen sich in polynomieller Zeit finden.

Beweis.

Die Menge der nullierbaren Symbole ist $N \cap pre^*(\{\epsilon\})$. □

Später: Wie entfernt man nullierbare Symbole?

Das Endlichkeitsproblem für CFG

Definition

Das Endlichkeitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G)$ endlich?

Theorem

Das Endlichkeitsproblem für CFG läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Beweis.

Ersetze G durch G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$, aber G' enthält keine unproduktiven, unerreichbare oder nullierbare Symbole.

$|L(G)| = \infty$ gdw. es gibt $A \in N$ mit
$A \in pre^*_{G'}\big((N \cup T)^+ A (N \cup T)^* \cup (N \cup T)^* A (N \cup T)^+\big)$. $\square$

Das Schnittleerheitsproblem für CFG

Definition

Das Schnittleerheitsproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFG G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

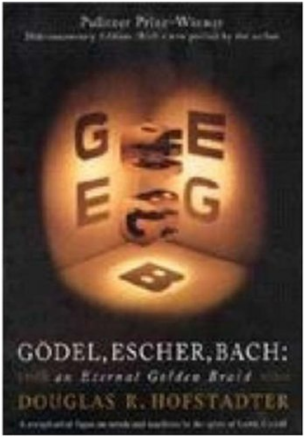
Theorem

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist „nicht berechenbar“.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. $\square$

Weitere Buchempfehlung



Das Post'sche Korrespondenzproblem

Gegeben ist eine Menge von Karten dieser Form:

10	0	001
0	001	1

Frage:
Kann ich Karten dieser Art so aneinanderlegen, daß oben und unten dasselbe Wort entsteht?

(Jede Karte kann beliebig oft verwendet werden)

In *Berechenbarkeit und Komplexität* wird folgendes bewiesen:

Theorem
Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar.

Theorem

Das Schnittleerheitsproblem für CFG ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Es sei

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \\ v_1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \\ v_2 \end{array}}, \ldots, \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \\ v_n \end{array}} \right\}$$

eine PCP-Instanz.

Konstruiere zwei Grammatiken:

G_1: $S \to u_1 S v_1^R \mid \cdots \mid u_n S v_n^R \mid \$$

G_2: $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \$$

Behauptung: $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ gdw. I lösbar. □

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG

Definition

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG G
- Frage: Ist G eine eindeutige CFG?

Theorem

Das Eindeutigkeitsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Gäbe es einen Algorithmus für dieses Problem, dann wäre auch das Post'sche Korrespondenzproblem lösbar. $\square$

Beweis.
Es sei

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

eine PCP-Instanz.

$$\begin{aligned}
S &\to A \mid B \\
A &\to u_1 A x_1 \mid u_2 A x_2 \mid \cdots \mid u_n A x_n \mid u_1 x_1 \mid u_2 x_2 \mid \cdots \mid u_n x_n \\
B &\to v_1 B x_1 \mid v_2 B x_2 \mid \cdots \mid v_n B x_n \mid v_1 x_1 \mid v_2 x_2 \mid \cdots \mid v_n x_n
\end{aligned}$$

Behauptung:

Die Grammatik ist eindeutig gdw. I keine Lösung besitzt. □

Das Universalitätsproblem für CFG

Definition

Das Universalitätsproblem für CFG:

- Eingabe: Eine CFG $G = (N, T, P, S)$
- Frage: Ist $L(G) = T^*$?

Theorem

Das Universalitätsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Idee: Post'sches Korrespondenzproblem. $\square$

Beweis.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}$$

- $L_1 = \{\, h^{-1}(w\$w^R) \mid w \in \{0,1\}^* \,\}$,
  $h\colon 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, ¢ \mapsto \epsilon, \$ \mapsto \$$
- $L_2 = \{u_{i_1}¢ \dots ¢u_{i_k}\$v_{i_k}^R¢ \dots ¢v_{i_1}^R \mid 1 \leq i_1, \dots i_k \leq n\}$

Technisch aufwendig, aber gar nicht so schwer:

$\{0,1,¢,\$\}^* \setminus L_1$ und $\{0,1,¢,\$\}^* \setminus L_2$ sind kontextfreie Sprachen.

Dann auch $L := \{0,1,¢,\$\}^* \setminus (L_1 \cap L_2)$ eine CFL.

Es gilt aber $L = \{0,1,¢,\$\}^*$ gdw. I keine Lösung hat. $\square$

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG

Definition

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Theorem

Das Sprachäquivalenzproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G_1 = (N, T, P, S)$. Konstruiere G_2 mit $L(G_2) = T^*$.

$L(G_1) = L(G_2)$ gdw. $L(G_1) = T^*$.

Wäre das Sprachäquivalenzproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. $\square$

Das Inklusionsproblem für CFG

Definition

Das Inklusionsproblem für CFG:

- Eingabe: Zwei CFGs G_1 und G_2
- Frage: Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

Theorem

Das Inklusionsproblem für CFG ist nicht berechenbar.

Beweis.

Gegeben $G_1 = (N, T, P, S)$. Konstruiere G_2 mit $L(G_2) = T^*$.

$L(G_1) \subseteq L(G_2)$ gdw. $L(G_1) = T^*$.

Wäre das Inklusionsproblem berechenbar, dann wäre auch das Universalitätsproblem berechenbar. $\square$