

## Definition

Eine linkslineare Grammatik ist ein kontextfreie Grammatik  $G = (N, T, P, S)$  mit Produktionen der Form  $A \rightarrow aB$ ,  $C \rightarrow b$  und  $D \rightarrow \epsilon$  mit  $A, B, C, D \in N$  und  $a, b \in T$ .

## Theorem

*Linkslineare Grammatiken erzeugen genau die regulären Sprachen.*

## Lemma

*Jede linkslineare Grammatik erzeugt eine reguläre Sprache.*

## Beweis.

Konstruiere den Kellerautomaten zu einer linkslinearen Grammatik.

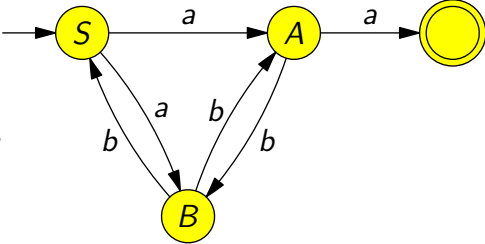
Der Keller kann nie mehr als ein Symbol enthalten.

Ein endlicher Automat kann also den Kellerautomaten simulieren.



# Beispiel

$S \rightarrow aA \mid aB$   
 $A \rightarrow a \mid bB$   
 $B \rightarrow bA \mid bS$



## Lemma

*Jede reguläre Sprache wird durch eine linkslineare Grammatik erzeugt.*

## Beweis.

Es sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein NFA.

Definiere die Grammatik  $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$  mit den Produktionen

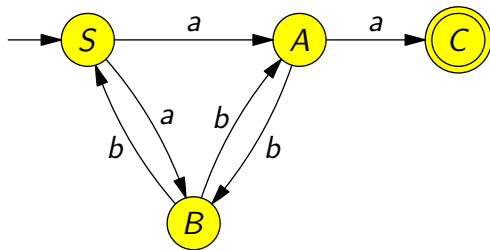
1.  $q \rightarrow ap$  falls  $p \in \delta(q, a)$  und
2.  $q \rightarrow \epsilon$  falls  $q \in F$ .

Mit Induktion über  $|w|$ :

$p \in \hat{\delta}(w, q_0)$  gdw.  $q_0 \xRightarrow{*} wp$ .

□

# Beispiel



$S \rightarrow aA \mid aB$

$A \rightarrow aC \mid bB$

$B \rightarrow bA \mid bS$

$C \rightarrow \epsilon$

Kontextsensitive Sprachen sind eine echte Obermenge der kontextfreien Sprachen:

$$L = \{ \$w\$w\$ \mid w \in \{a, b\}^* \}$$

$$S \rightarrow LMR$$

$$M \rightarrow AM\bar{A} \mid BM\bar{B} \mid \$$$

$$\bar{A}A \rightarrow A\bar{A}, \quad \bar{A}B \rightarrow B\bar{A}$$

$$\bar{B}A \rightarrow A\bar{B}, \quad \bar{B}B \rightarrow B\bar{B}$$

$$\bar{A}R \rightarrow AR, \quad \bar{B}R \rightarrow BR$$

$$L \rightarrow \$$$

$$R \rightarrow \$$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

## Theorem

Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist nicht entscheidbar.

## Beweis.

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$S \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R$$

$$M \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R \mid D$$

⋮

(Rest der Grammatik: Übungsaufgabe)

Sprache ist leer gdw.  $I$  keine Lösung hat.



## Theorem

*Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar.*

## Beweis.

Es sei  $G$  eine kontextsensitive Grammatik und  $w$  ein Wort.

Wende Regeln rekursiv rückwärts auf alle möglichen Arten an.

Wir erhalten so alle  $\alpha$  mit  $\alpha \xRightarrow{*} w$ .

Ist das Startsymbol darunter?

Terminierung:  $|\alpha| \leq |w|$  falls  $\alpha \xRightarrow{*} w$ .





## Theorem

*Das Wortproblem für Chomsky-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.*

## Beweis.

$$I := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline u_2 \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|} \hline u_n \\ \hline v_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$S \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R$$

$$M \rightarrow u_1 M v_1^R \mid \dots \mid u_n M v_n^R \mid D$$

$$0D0 \rightarrow D$$

$$1D1 \rightarrow D$$

$$D \rightarrow \epsilon$$

