Globalübung FoSAP

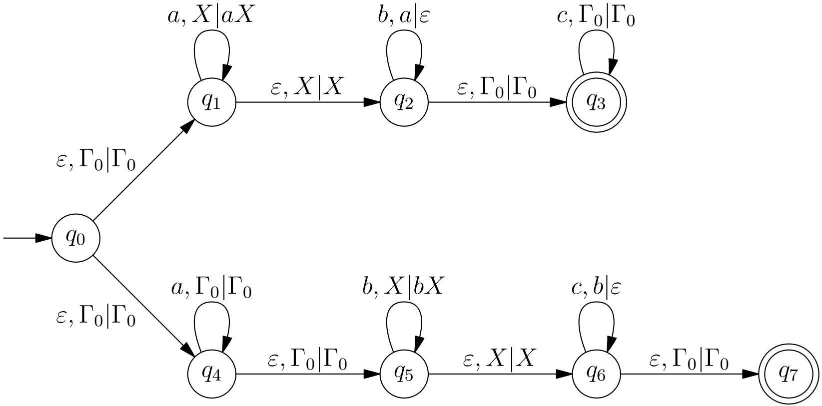
10. Juli 2017

Korrektheit von PDAs

$$L = \{\, a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \,\}$$

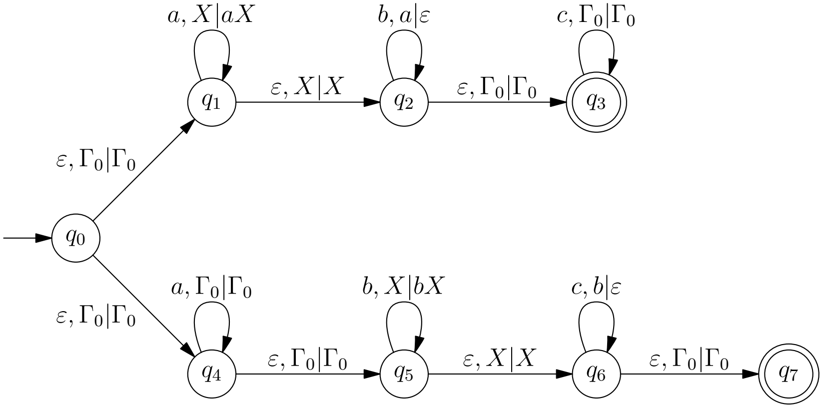
Korrektheit von PDAs

$$L = \{\, a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \,\}$$



Korrektheit von PDAs

$$L = \{\, a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \,\}$$



Beweisen Sie Vollständigkeit und Korrektheit der Konstruktion

Korrektheit von PDAs

Vollständig:

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M *erkannt"*

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
“Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt”
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt"
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit:

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt"
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit:
"M erkennt kein Wort, welches nicht in der Sprache ist"

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt"
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit:
"M erkennt kein Wort, welches nicht in der Sprache ist"
$\rightarrow L(M) \subseteq L$

Korrektheit von PDAs

Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt"
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit:
"M erkannt kein Wort, welches nicht in der Sprache ist"
$\rightarrow L(M) \subseteq L$

Korrekt und Vollständig:

Korrektheit von PDAs

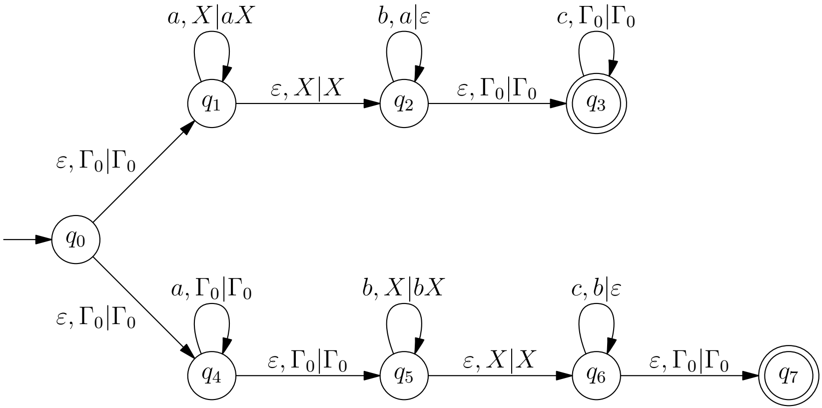
Vollständig:
"Jedes Wort aus der Sprache wird von M erkannt"
$\rightarrow L \subseteq L(M)$.

Korrektheit:
"M erkennt kein Wort, welches nicht in der Sprache ist"
$\rightarrow L(M) \subseteq L$

Korrekt und Vollständig:
$\rightarrow L = L(M)$

Korrektheit von PDAs

$$L = \{\, a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \,\}$$



Monotone Grammatiken

Definition

Eine Grammatik G ist monoton, falls jede ihrer Regeln auf der rechten Seite mindestens genauso viele Symbole wie auf der linken Seite hat.

Monotone Grammatiken

Definition

Eine Grammatik G ist monoton, falls jede ihrer Regeln auf der rechten Seite mindestens genauso viele Symbole wie auf der linken Seite hat. Zusätzlich ist die Regel $S \rightarrow \epsilon$ zugelassen.

Beispiel

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \varepsilon \mid aAb \\ aAb & \rightarrow & aAbc \mid ddd \end{array}$$

Kontextsensitive Grammatik

Definition

Eine Grammatik G ist kontextsensitiv, falls jede ihrer Regeln folgende Form hat

$$\alpha \underbrace{A}_{\in N} \beta \to \alpha\gamma\beta.$$

Hierbei sind α und β aus $(N \cup T)^*$, $\gamma \in (N \cup T)^+$.

Kontextsensitive Grammatik

Definition

Eine Grammatik G ist kontextsensitiv, falls jede ihrer Regeln folgende Form hat

$$\alpha \underbrace{A}_{\in N} \beta \to \alpha\gamma\beta.$$

Hierbei sind α und β aus $(N \cup T)^*$, $\gamma \in (N \cup T)^+$.
Zusätzlich ist die Regel $S \to \epsilon$ zugelassen.

Kontextsensitive Grammatik

Definition

Eine Grammatik G ist kontextsensitiv, falls jede ihrer Regeln folgende Form hat

$$\alpha \underbrace{A}_{\in N} \beta \to \alpha\gamma\beta.$$

Hierbei sind α und β aus $(N \cup T)^*$, $\gamma \in (N \cup T)^+$. Zusätzlich ist die Regel $S \to \epsilon$ zugelassen.

Beispiel

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \varepsilon \mid aAb \\ aAb & \to & accb \end{array}$$

Kontextsensitive Grammatik

Definition

Eine Grammatik G ist kontextsensitiv, falls jede ihrer Regeln folgende Form hat

$$\alpha \underbrace{A}_{\in N} \beta \to \alpha\gamma\beta.$$

Hierbei sind α und β aus $(N \cup T)^*$, $\gamma \in (N \cup T)^+$.
Zusätzlich ist die Regel $S \to \epsilon$ zugelassen.

Kontextsensitive Grammatik

Definition

Eine Grammatik G ist kontextsensitiv, falls jede ihrer Regeln folgende Form hat

$$\alpha \underbrace{A}_{\in N} \beta \to \alpha\gamma\beta.$$

Hierbei sind α und β aus $(N \cup T)^*$, $\gamma \in (N \cup T)^+$.
Zusätzlich ist die Regel $S \to \epsilon$ zugelassen.

Beobachtung

Eine kontextsensitive Grammatik ist monoton.

Eigenschaften von kontextsensitiven Sprachen

Satz

Die von kontextfreien Grammatiken erzeugten Sprachen sind genau die von monotonen Grammatiken erzeugten.

Eigenschaften von kontextsensitiven Sprachen

Satz

Die von kontextfreien Grammatiken erzeugten Sprachen sind genau die von monotonen Grammatiken erzeugten.

Satz

Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Grammatiken ist nicht entscheidbar.

Beweis der Unentscheidbarkeit

- Wir wissen, dass das Postsche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist.

Beweis der Unentscheidbarkeit

- Wir wissen, dass das Postsche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist.
- Also ist nicht zu entscheiden, ob eine PCP Instanz lösbar oder nicht lösbar ist.

Beweis der Unentscheidbarkeit

- Wir wissen, dass das Postsche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist.
- Also ist nicht zu entscheiden, ob eine PCP Instanz lösbar oder nicht lösbar ist.
- Wir konstruieren zu einer PCP-Instanz eine **monotone** Grammatik G.

Beweis der Unentscheidbarkeit

- Wir wissen, dass das Postsche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist.
- Also ist nicht zu entscheiden, ob eine PCP Instanz lösbar oder nicht lösbar ist.
- Wir konstruieren zu einer PCP-Instanz eine **monotone** Grammatik G.
- Wir zeigen $L(G) = \emptyset$, genau dann wenn die PCP-Instanz keine Lösung hat.

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}, \quad u_i, v_i \in \{0, 1\}^*$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}, \; u_i, v_i \in \{0,1\}^*$$

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & B u_1 M v_1^R B \mid \cdots \mid B u_n M v_n^R B \\ M & \rightarrow & u_1 M v_1^R \mid \cdots \mid u_n M v_n^R \mid D \\ & \vdots & \end{array}$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ \\ v_1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ \\ v_2 \end{matrix}}, \ldots, \boxed{\begin{matrix} u_n \\ \\ v_n \end{matrix}} \right\}, \quad u_i, v_i \in \{0,1\}^*$$

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & Bu_1Mv_1^RB \mid \cdots \mid Bu_nMv_n^RB \\ M & \rightarrow & u_1Mv_1^R \mid \cdots \mid u_nMv_n^R \mid D \\ & \vdots & \end{array}$$

Beobachtung

Genau dann hat I eine Lösung, wenn die Grammatik ein Wort der Form $B\alpha D\alpha^RB$ erzeugt mit $\alpha \in \{0,1\}^*$

Beweis der Unentscheidbarkeit

Anpassen der Grammatik, sodass nur Wörter der Form $B\alpha D\alpha^R B$ zu Terminalwörtern ableiten.

Beweis der Unentscheidbarkeit

Anpassen der Grammatik, sodass nur Wörter der Form $B\alpha D\alpha^R B$ zu Terminalwörtern ableiten.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & Bu_1Mv_1^RB \mid \cdots \mid Bu_nMv_n^RB \\
M & \rightarrow & u_1Mv_1^R \mid \cdots \mid u_nMv_n^R \mid D \\
D & \rightarrow & Lx \\
xL & \rightarrow & Lx
\end{array}
$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$\begin{array}{lcl} S & \to & Bu_1Mv_1^RB \mid \cdots \mid Bu_nMv_n^RB \\ M & \to & u_1Mv_1^R \mid \cdots \mid u_nMv_n^R \mid D \\ D & \to & Lx \\ xL & \to & Lx \end{array}$$

Wir überschreiben eine 0 oder eine 1 in α

$$\begin{array}{lcl} 0L & \to & xR_0 \\ 1L & \to & xR_1 \\ R_0x & \to & xR_0 \\ R_1x & \to & xR_1 \end{array}$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & Bu_1Mv_1^RB \mid \cdots \mid Bu_nMv_n^RB \\
M & \rightarrow & u_1Mv_1^R \mid \cdots \mid u_nMv_n^R \mid D \\
D & \rightarrow & Lx \\
xL & \rightarrow & Lx \\
0L & \rightarrow & xR_0 \\
1L & \rightarrow & xR_1 \\
R_0x & \rightarrow & xR_0 \\
R_1x & \rightarrow & xR_1
\end{array}
$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & Bu_1Mv_1^RB \mid \cdots \mid Bu_nMv_n^RB \\
M & \rightarrow & u_1Mv_1^R \mid \cdots \mid u_nMv_n^R \mid D \\
D & \rightarrow & Lx \\
xL & \rightarrow & Lx \\
0L & \rightarrow & xR_0 \\
1L & \rightarrow & xR_1 \\
R_0x & \rightarrow & xR_0 \\
R_1x & \rightarrow & xR_1
\end{array}
$$

Wir überschreiben die 0 oder 1 an der entsprechenden Stelle in α^R

$$
\begin{array}{lcl}
R_00 & \rightarrow & Lx \\
R_11 & \rightarrow & Lx
\end{array}
$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

Am Ende müssen wir noch L und die Wortgrenzen B loswerden.

$$BL \to xR$$

$$\begin{aligned} Rx &\to xR \\ RB &\to xx \end{aligned}$$

Beweis der Unentscheidbarkeit

Am Ende müssen wir noch L und die Wortgrenzen B loswerden.

$$BL \to xR$$

$$\begin{array}{rcl} Rx & \to & xR \\ RB & \to & xx \end{array}$$

Genau dann ist $L(G)$ leer, wenn I keine Lösung hat.

Beweis der Unentscheidbarkeit

Am Ende müssen wir noch L und die Wortgrenzen B loswerden.

$$BL \to xR$$

$$\begin{aligned} Rx &\to xR \\ RB &\to xx \end{aligned}$$

Genau dann ist $L(G)$ leer, wenn I keine Lösung hat. Können wir das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen entscheiden, so auch das PCP.

Beweis der Unentscheidbarkeit

Am Ende müssen wir noch L und die Wortgrenzen B loswerden.

$$BL \rightarrow xR$$

$$\begin{aligned} Rx &\rightarrow xR \\ RB &\rightarrow xx \end{aligned}$$

Genau dann ist $L(G)$ leer, wenn I keine Lösung hat.
Können wir das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen entscheiden, so auch das PCP.
Dies ist ein Widerspruch.

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \\ 0 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \end{array}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \rightarrow^* B10D01B \rightarrow^* B10Lx01B$$

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \to^* B10D01B \to^* B10Lx01B$$

Wir arbeiten das Wort ab

$$B10Lx01B \to B1xR_0x01B$$

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \to^* B10D01B \to^* B10Lx01B$$

Wir arbeiten das Wort ab

$$B10Lx01B \to B1xR_0x01B \to B1xxR_001B$$

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \\ 0 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \end{array}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \rightarrow^* B10D01B \rightarrow^* B10Lx01B$$

Wir arbeiten das Wort ab

$$B10Lx01B \rightarrow B1xR_0x01B \rightarrow B1xxR_001B \rightarrow B1xxLx1B$$

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \rightarrow^* B10D01B \rightarrow^* B10Lx01B$$

Wir arbeiten das Wort ab

$$B10Lx01B \rightarrow B1xR_0x01B \rightarrow B1xxR_001B \rightarrow B1xxLx1B$$

$$B1xxLx1B$$

Beispiel

Wir betrachten folgende offensichtlich lösbare PCP Instanz.

$$I := \left\{ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \\ 0 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \end{array}} \right\}$$

Für die konstruierte Grammatik gilt

$$S \rightarrow^* B10D01B \rightarrow^* B10Lx01B$$

Wir arbeiten das Wort ab

$$B10Lx01B \rightarrow B1xR_0x01B \rightarrow B1xxR_001B \rightarrow B1xxLx1B$$

$$B1xxLx1B \rightarrow^* BxxxxLxB$$

Beispiel

$$B1xxLx1B \rightarrow^* BxxxxLxB$$

Jetzt kommt L bis zu den Wortgrenzen

$BxxxxLxB \rightarrow^* BLxxxxxB$

Beispiel

$$B1xxLx1B \to^* BxxxxLxB$$

Jetzt kommt L *bis zu den Wortgrenzen*

$BxxxxLxB \to^* BLxxxxxB \to xRxxxxxB$

Beispiel

$$B1xxLx1B \to^* BxxxxLxB$$

Jetzt kommt L bis zu den Wortgrenzen

$$BxxxxLxB \to^* BLxxxxxB \to xRxxxxxB \to^* xxxxxxRB$$

Beispiel

$$B1xxLx1B \to^* BxxxxLxB$$

Jetzt kommt L bis zu den Wortgrenzen

$$BxxxxLxB \to^* BLxxxxxB \to xRxxxxxB \to^* xxxxxxRB$$

Wir erhalten das Terminalwort

$$xxxxxxRB$$

Beispiel

$$B1xxLx1B \to^* BxxxxLxB$$

Jetzt kommt L bis zu den Wortgrenzen

$$BxxxxLxB \to^* BLxxxxxB \to xRxxxxxB \to^* xxxxxxRB$$

Wir erhalten das Terminalwort

$$xxxxxxRB \to xxxxxxxx$$